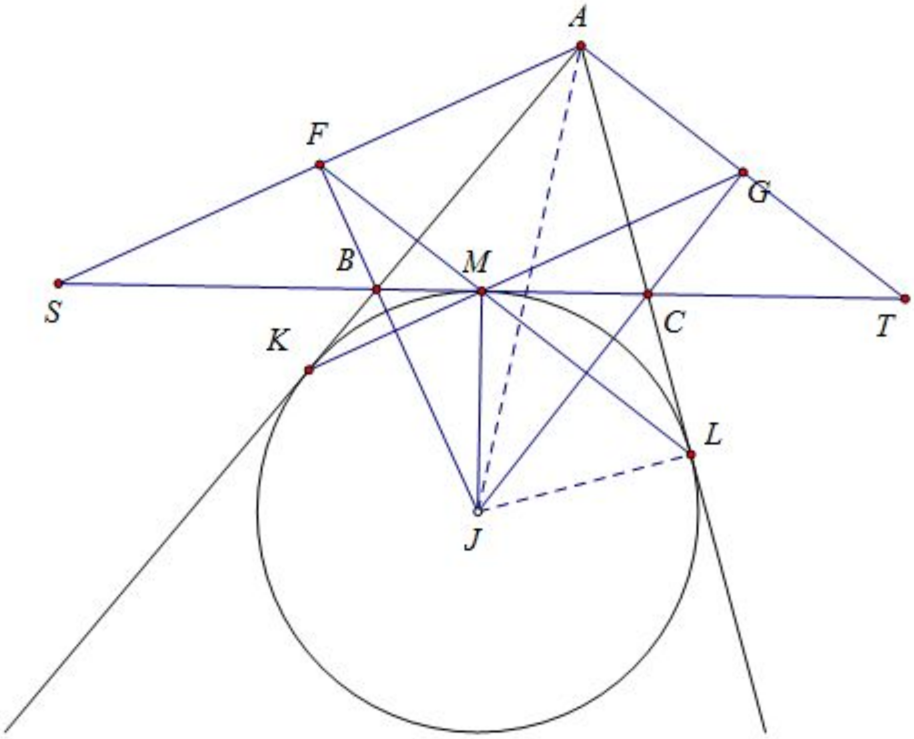
2012 年 IMO 国际数学奥林匹克试题解答

第一题

设 J 是三角形 ABC 顶点 A 所对旁切圆的圆心. 该旁切圆与边 BC 相切于点 M, 与直线 AB 和 AC 分别相切于点 K 和 L. 直线 LM 和 BJ 相交于点 F, 直线 KM 与 CJ 相交于点 G. 设 S 是直线 AF 和 BC 的交点, T 是直线 AG 和 BC 的交点. 证明: M 是线段 ST 的中点.



2012 年 IMO 国际数学奥林匹克试题第一题

解答: 因为

$\angle JFL=\angle JBM-\angle FMB=\angle JBM-\angle CML=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)-\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle A=$

$\angle JAL$,

所以 A、F、J、L 四点共圆. 由此可得 $AF\perp FJ$, 而 BJ 是 $\angle ABS$ 的角平分线, 于是三角形 ABS 的角平分线与高重合, 从而 $AB=BS$; 同理可得 $AC=CT$.

综上，有

$$SM=SB+BM=AB+BK=AK=AL=AC+CL=CT+CM=MT,$$

即 M 是线段 ST 的中点.

第二题

设 n 3，正实数 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 满足 $a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=1$，证明：

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n>n^n.$$

解答:由均值不等式，我们有

$$(a_k+1)^k=\quad(a_k+1\ k-1+\cdots+1\ k-1)^k\ (ka_k\cdot(1\ k-1)^{k-1}-------------$$

$$-\sqrt{\ }_k)^k=k^k(k-1)^{k-1}a_k,$$

当 $a_k=1\ k-1$ 时等号成立，其中 $k=2,3,\cdots,n$. 于是

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n\quad 2^2\ 1\ a_2\cdot 3^3\ 2^2\ a_3\cdot\cdots\cdot n^n(n-1)^{n-1}a_n=n^n.$$

当对任意的 $k=2,3,\cdots,n$ 时，若恒有 $a_k=1\ k-1$，此时由 n 3 知

$$a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=1\ (n-1)!\neq 1,$$

因此上述不等式等号不成立，从而不等式得证.

第三题

"欺诈猜数游戏" 在两个玩家甲和乙之间进行，游戏依赖于两个甲和乙都知道的正整数 k 和 n.

游戏开始时甲先选定两个整数 x 和 N, 1 x N. 甲如实告诉乙 N 的值，但对 x 守口如瓶. 乙现在试图通过如下方式的提问来获得关于 x 的信息：每次提问，乙任选一个由若干正整数组成的集合 S (可以重复使用之前提问中使用过的集合)，问甲 "x 是否属于 S?". 乙可以提任意数量的问题. 在乙每次提问之后，家必须对乙的提问立刻回答 "是" 或 "否"，甲可以说谎话，并且说谎的次数没有限制，唯一的限制是甲在任意连续 k+1 次回答中至少又一次回答是真话.

在乙问完所有想问的问题之后，乙必须指出一个至多包含 n 个正整数的集合 X，若 x 属于 X，则乙获胜；否则甲获胜. 证明:

(1) 若 $n \quad 2^k$, 则乙可保证获胜;
(2) 对所有充分大的整数 k, 存在正整数 $n \quad 1.99^k$, 使得乙无法保证获胜.

解答: (1)可以认为 $n=2^k, N=n+1$. 采用二进制.

把 $1,2,\ldots,2^k$ 都写成二进制: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}$, 这里 $a_i (i=1,2,\ldots,k+1)$是 0 或者 1; 然后, 记 T 为这 2^k 个二进制数组成的集合. 2^k+1 的二进制表示是 $\overline{100\ldots01}$.令

$$S_1=\{\overline{100\ldots0}\}, S_i=\{\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} \in T | a_1=0, a_i=1\}, i=2,3,\ldots,k+1,$$

也就是说, S_i 就是 T 中所有满足 $a_i=1$ 的元素组成的子集 $(i=1,2,\ldots,k+1)$.

乙采用如下问题, 可保证获胜: 第一次提问, 选择 S_1, 并且接下来也一直选取 S_1, 甲的回答会出现两种情况:

- 连续 $k+1$ 次回答 “否”, 则 $\overline{100\ldots0}$可以排除;
- 在至多 $k+1$ 次回答中, 一旦出现”是”, 乙接下来的 k 次提问, 依次选取 $S_2, S_3, \ldots, S_{k+1}$, 就取得胜利. 事实上, 若甲最后的 k 次回答都是”是”, 则 $x \in T$; 若甲最后的 k 次回答有一些是”否”, 则 x 绝对不可能是 $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}$, 这里 $a_1=0$, $a_i=0$ 还是 1 取决于甲对 S_i 的答案: 若甲的回答是”是”, $a_i=0$, 否则 $a_i=1 (i=2,3,\ldots,k+1)$.

(2). 先将问题转化成等价形式: 甲从集合 S 中取定一个元素 x $(|S|=N)$, 乙提出一系列的问题. 乙的第 j 个问题题就是取 S 的子集 D_j, 随后甲选取集合 $P_j \in \{D_j, D_j^c\}$, 使得对任意的 $j \quad 1$ 都有

$$x \in P_j \cup P_{j+1} \cup \cdots \cup P_{j+k},$$

当乙提完他想问的一系列问题后, 如果乙能选取一个集合 X 满足 $|X| \quad n$, 使得 $x \in X$, 那么乙获胜; 否则甲获胜.

解答 1. 任取实数 p 使得 $2>p>1.99$, 再选取正整数 k_0, 使得当 $k>k_0$ 时

$(2-p)p^{k+1}-1.99^k>1$.设 N 使得 $(2-p)p^{k+1}>N>1.99^k$. 我们来证明, 若$|S|=N$, 不妨 $S=\{1,2,\ldots,N\}$, 甲有办法使乙无法胜利.

记 D_j是乙的第 j 个问题展示的集合, 定义 P_j为 D_j或者 D^C_j, 取决于甲对 D_j的答案: 若甲的回答是"是", $P_j=D_j$, 否则 $P_j=D^C_j$; 再记 $P_0=S$. 定义 A_j如下:

$$A_j=A_j(P_j)=a_0+pa_1+p^2a_2+\cdots+p^ja_j,$$

这里 $a_0=\left|\ \left| P_j \right|\ \right|, a_i=\left|\ \left| P_{j-i} \setminus (P_j \cup P_{j-1} \cup\cdots\cup P_{j-i+1}) \right|\ \right|$ $(i=1,2,\ldots,j)$.此时 $\sum_{i=0}^{j} a_i=N$.注意 $A_0=N$.

我们指出, 甲可以使得 $N\ 2-p>A_j$成为事实: $N\ 2-p>A_0=N$.假设已有 $N\ 2-p>A_j$, 甲可选取 $P_{j+1}\in\{D_{j+1},D^C_{j+1}\}$使得 $N\ 2-p>A_{j+1}$. 事实上,

$$A_{j+1}(D_{j+1})=b_0+pb_1+p^2b_2+\ldots+p^jb_j+p^{j+1}b_{j+1},$$
$$A_{j+1}(D^C_{j+1})=c_0+pc_1+p^2c_2+\ldots+p^jc_j+p^{j+1}c_{j+1}.$$

注意 $b_0+c_0=N, b_i+c_i=a_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,j+1)$,于是

$$A_{j+1}(D_{j+1})+A_{j+1}(D^C_{j+1})=N+p(a_0+pa_1+p^2a_2+\ldots+p^ja_j)<N+p\cdot N\ 2-p,$$

因之

$$\min\{A_{j+1}(D_{j+1}),A_{j+1}(D^C_{j+1})\}<N\ 2+p\ 2\cdot N\ 2-p=N\ 2-p.$$

于是, 可以选取 $P_{j+1}\in\{D_{j+1},D^C_{j+1}\}$达到我们的要求.

既然 $p^{k+1}>N\ 2-p>A_j$, 那么, 只要 $i\quad k+1$,必定 $a_i=0$,这导致乙无法排除 S 的任何一个元素, 不能取得胜利.

解答 2. 记 p,q 是满足 $2>q>p>1.99$ 的实数, 选取正整数 k_0使得

$$(p\ q)^{k_0}\quad 2(1-q\ 2), p^{k_0}-1.99^{k_0}>1.$$

我们来指出, 对任意 $k\quad k_0$, 若 $|S|\in(1.99^k,p^k)$, 那么甲有策略, 通过回答"是"或者"否", 使得下式对所有 $j\in N$ 成立:

$$P_j\cup P_{j+1}\cup\cdots\cup P_{j+k}=S,$$

这里 P_i是 D_i或者 D^C_i, 取决于甲对 D_i的答案: 若甲的回答是"是", $P_i=D_i$, 否则 $P_i=D^C_i$; D_i是乙的第 i 个问题所问的集合 $(i\in N)$.

假定 S={1,2,…,N}. 定义 $(x)^{\infty}_{j=0}=(x^j_1,x^j_2,\dots,x^j_N)$如下: $x^0_1=x^0_2=\cdots=x^0_N=1$; $P_0=S$, 在 P_{j+1} 选定之后, 定义 x^{j+1}:

$x^{j+1}_i=\{1, qx^j_i, i\in P_{j+1}, i\notin P_{j+1}$. (1)

只要甲使得成立 $x^j_i \quad q^k (1 \quad i \quad N, j \quad 1)$, 那么乙就不能取得胜利. 记 $T(x)=\sum_{i=1}^{N} x_i$, 甲只要使得 $T(x^j) \quad q^k (j \quad 1)$即可. 这是可以做到的: 显而易见的事情是, $T(x^0)=N \quad p^k<q^k$. 假设已有 $T(x^j) \quad q^k$, 甲可以就乙的 D_{j+1} 选取 $P_{j+1}\in\{D_{j+1},D^C_{j+1}\}$使得 $T(x^{j+1}) \quad q^k$. 假定甲回答”是”, 此时 $P_{j+1}=D_{j+1}$, 记 y 是根据 (1)得到的序列; 相应地, 记 z 是甲回答”否”, $P_{j+1}=D^C_{j+1}$, 根据 (1)得到的序列. 于是

$$T(y)=\sum_{i\in D^C_{j+1}} qx^j_i+\left|\quad\left| D_{j+1} \right|\quad\right|,$$

$$T(z)=\sum_{i\in D_{j+1}} qx^j_i+\left|\quad\left| D^C_{j+1} \right|\quad\right|.$$

因此

$$T(y)+T(z)=q\cdot T(x^j)+N \quad q^{k+1}+p^k,$$

根据选取的 k_0 的性质, 得

$$\min\{T(y),T(z)\} \quad q\,2\cdot q^k+p^k\,2 \quad q^k.$$

第四题

求所有的函数 f:Z→Z 使得对任意满足 a+b+c=0 的整数 a,b,c 恒有

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

解答: 令 a=b=c=0 可得 $3f(0)^2=6f(0)^2$, 这说明 f(0)=0. 现在我们令 b=−a, c=0 可得到 $f(a)^2+f(-a)^2=2f(a)f(-a)$即 $(f(a)-f(-a))^2$, 于是 f(a)=f(−a), 即 f(n)为偶函数.

假设对某个整数 a 使得 f(a)=0, 则对任意整数 b 我们有 a+b+(−a−b)=0, 因此

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(b)f(a+b),$$

这等价于 $(f(b)-f(a+b))^2=0$, 即 f(a+b)=f(b). 因此对某个整数 a 使得 f(a)=0 时, f 是一个以 a 为周期的函数.

令 $b=a$ 及 $c=-2a$ 代入题目条件中的等式 $f(2a)\cdot(f(2a)-4f(a))=0$. 取 $a=1$ 我们得到 $f(2)=0$ 或 $f(2)=4f(1)$.

如果 $f(2)=0$, 那么 f 以 2 为周期, 对任意奇数 n 有 $f(n)=f(1)$. 容易验证对任意的 $c\in Z$ 函数

$$f(x)=\{0, c, 2\mid n, 2\nmid n$$

满足题目条件.

现在假设 $f(2)=4f(1)$并且 $f(1)\neq 0$. 如果对任意的整数 n 都有 $f(n)=n^2\cdot f(1)$成立, 那么此时问题解决了. 如果存在整数 n 使得 $f(n)\neq n^2 f(1)$, 由于 f 是偶函数, 不妨将 n 看做自然数, 那么显然 n 3, 我们设 n 是使得 $f(n)\neq n^2 f(1)$的最小的正整数.

令 $a=1, b=n-1, c=-n$ 代入可得

$$f(1)^2+(n-1)^4 f(1)^2+f(n)^2=2(n-1)^2 f(1)^2+2((n-1)^2+1)f(n)f(1)$$

即

$$(f(n)-(n)^2 f(1))\cdot(f(n)-(n-2)^2 f(1))=0,$$

由假设可得此时 $f(n)=(n-2)^2 f(1)$.

令 $a=n, b=2-n, c=-2$ 代入可得

$$2(n-2)^4 f(1)^2+16f(1)^2=2\cdot 4\cdot 2(n-2)^2 f(1)^2+2\cdot(n-2)^4 f(1),$$

这说明$(n-2)^2=1$ 即 $n=3$. 因此 $f(3)=f(1)$. 令 $a=1, b=3, c=4$ (因为 f 为偶函数, 所以条件改成 $c=a+b$ 时仍然成立)代入可得 $f(4)^2=4f(4)f(1)$, 即 $f(4)=0$ 或 $f(4)=4f(1)=f(2)$.

如果 $f(4)\neq 0$, 令 $a=2, b=2, c=4$ 代入可得

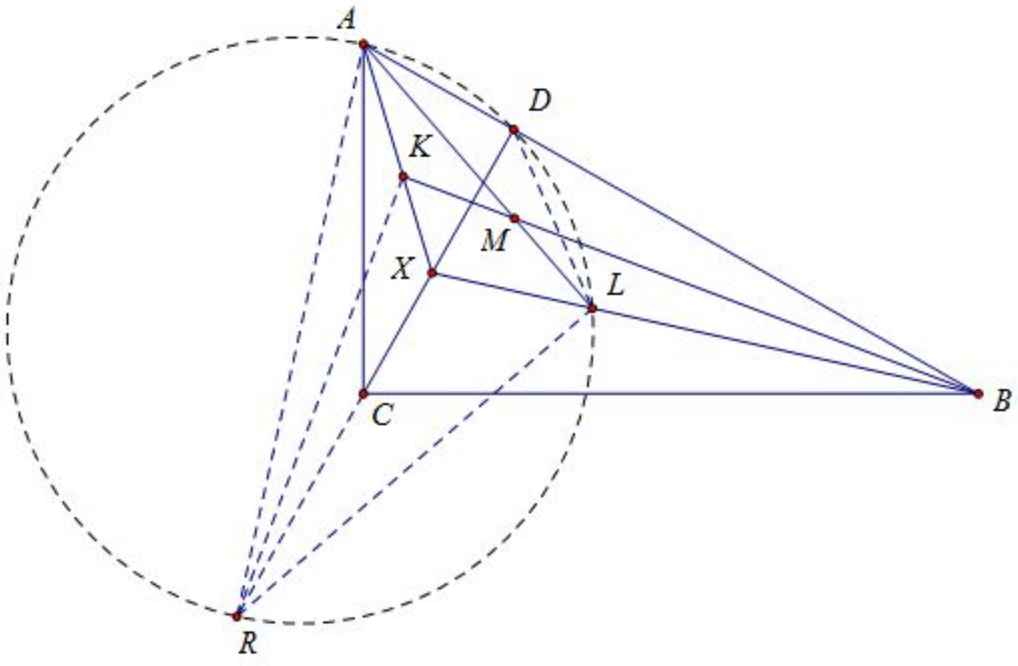
$$f(2)^2+f(2)^2+f(4)^2=2f(2)^2+4f(2)f(4),$$

即 $f(4)=4f(2)$. 又因为我们已经推得 $f(4)=f(2)$, 这说明 $f(2)=0$, 矛盾. 因此 $f(4)=0$, 从而 f 以 4 为周期. 于是 $f(4k)=0, f(4k+1)=f(4k+3)=c$, 以及 $f(4k+2)=4c$, 容易验证这个解满足题目条件.

综上所述, 函数方程的解为: $f(x)=cx^2$, 其中 $c\in Z$; $f(x)=\{0, c, 2\mid n, 2\nmid n$ 其中 $c\in Z$; 以及 $f(x)=$ $0, c, 4c, 4\mid n, 2\nmid n, n\equiv 2 \pmod 4$)其中 $c\in Z$.

第五题

已知三角形 ABC 中, ∠BAC=90°, D 是过顶点 C 的高的垂足. 设 X 是线段 CD 内部一点. K 是线段 AX 上一点, 使得 BK=BC. L 是线段 BX 上一点, 使得 AL=AC. 设 M 是 AL 与 BK 的交点. 证明: MK=ML.



2012 年 IMO 国际数学奥林匹克试题第五题

解答: 因为 $AL^2=AC^2=AD\cdot AB$, 所以 △ALD 和 △ABL 相似, 因此 ∠ALD=∠XBA.

设 R 是射线 DC 上一点, 使得 DX·DR=BD·AD. 由于 ∠BDX=∠RDA=90°

我们可以推得 △RAD~△BXD, 因此∠XBD=∠ARD, 从而 ∠ALD=∠ARD

即 R, A, D, 和 L 四点共圆. 这说明 ∠RLA=90°, 于是 $RL^2=AR^2-AL^2$

$=AR^2-AC^2$. 类似地, 我们可以得到 $RK^2=BR^2-BC^2$和 $\angle RKB=90^\circ$. 因为 $RC\perp AB$ 我们有 $AR^2-AC^2=BR^2-BC^2$, 因此 $RL^2=RK^2$即 $RL=RK$.

又因为 $\angle RLM=\angle RKM=90^\circ$ 我们可以推得

$$MK^2=RM^2-RK^2=RM^2-RL^2=ML^2,$$

从而 $MK=ML$.

第六题

求所有正整数 n, 使得存在非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 满足

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

解答: 所求 $n\equiv1,2\pmod 4$. 设 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则有

$$3^M=\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{M-a_k}\equiv\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\pmod 2,$$

所以 $\frac{n(n+1)}{2}$ 是奇数, 从而 $n\equiv1,2\pmod 4$.

若对奇数 $n=2m+1$, 此时存在非负整数序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$使得

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

注意到

$$\frac{1}{2^{a_{m+1}}}=\frac{1}{2^{a_{m+1}+1}}+\frac{1}{2^{a_{m+1}+1}},\quad\frac{m+1}{3^{a_{m+1}}}=\frac{m+1}{3^{a_{m+1}+1}}+\frac{2(m+1)}{3^{a_{m+1}+1}}=\frac{m+1}{3^{a_{m+1}+1}}+\frac{n+1}{3^{a_{m+1}+1}}.$$

因此此时对 $n+1$, 可以验证 $(a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}+1,a_{m+2},\cdots,a_n,a_{m+1}+1)$为满足题意的序列. 这说明对奇数 n 若满足题目条件, 则 $n+1$ 也满足题目条件.

剩下的问题只要解决 $n=4m+1$ 时的构造问题即可.

设序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2k+1})$是 $(1,2,\cdots,2k+1)$的一个排列, 设 $G=(1,2,\cdots,2k,2k)$, 用 g_i表示它的分量.

定义 D(X)=∑ i=1 2k+1 a i 3 g i，由于 ∑ i=1 2k+1 1 2 g i =1，所以我们只要求出一个排列 X 使得 D(X)=1，问题就解决了. 令 X=(2,1,4,3,6,5,...,2k,2k−1,2k+1)，用归纳法可算得此时 D(X)=1+k 3 2k.

现在假设上面的 k 是正偶数，即 k=2m，则

X=(2,1,4,3,...,2m,2m−1,2m+2,2m+1,...,4m,4m−1,4m+1),

定义

Y=(2,1,4,3,...,2m,2m−1,2m+1,...,4m,4m−1,4m+1,2m+2),

即将 X 的第 2m+1 个分量移动到最后形成的. 简单计算可得 D(X)−D(Y)=2m 3 4m，所以 D(Y)=1. 当 k=0 时，此时取 a 1 =0 时即可. 这说明 n=4m+1 时的构造问题已经解决.

综上所述，要求的为满足 n≡1,2(mod4)的正整数.